J. Pilar Sains 6 (2) Juli 2007

ISSN 1412-5595

ESTIMASI DAN UJI EKSAK KOMPONEN VARIANSI PADA MODEL RANDOM KLASIFIKASI DUA ARAH DENGAN DATA TIDAK SEIMBANG

Rustam Efendi
Program Studi Matematika
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau Kampus Bina Widya Pekanbaru (28293)

Abstract

This manuscript dicusses about the model equation

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk};\ i = 1, 2, \cdots, r;\quad j = 1, 2, \cdots, s;\quad k = 1, 2, \cdots, n_{ij};\quad n_{ij} \geq 1$$

where μ is a constant and α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$, e_{ijk} are distributed independently and normally with zero means and variances σ^2_α, σ^2_β, $\sigma^2_{\alpha\beta}$, σ^2_e, respectively. From this model is given estimation and exact test of the its variance components.

Key Words: *Unbalanced Data, Variance Components, and Testing Hypothesis.*

Pendahuluan

Salah satu model yang penting dari rancangan percobaan adalah model random klasifikasi dua arah. Pada model ini tidak saja penting menentukan apakah kedua faktor berpengaruh pada respon, tapi juga penting menentukan apakah terdapat interaksi yang berarti antara kedua faktor. Data pengamatan disajikan dalam bentuk suatu matriks yang barisnya menyatakan taraf faktor pertama dan kolomnya menyatakan taraf faktor kedua. Tiap kombinasi perlakuan menentukan suatu sel dalam matriks. Kenyataan dilapangan sering dijumpai jumlah data untuk setiap sel tidak selalu sama. Data seperti ini disebut data tidak seimbang (*unbalanced data*). Untuk mengambil kesimpulan tentang efek utama dari data yang diolah diperlukan suatu uji statistk, dan dari model ini akan diturunkan uji eksaknya. Disamping itu, dalam praktik untuk model ini peneliti tidak tertarik pada pengujian pengaruh rata-rata tiap taraf dari masing-masing faktor, melainkan tertarik pada estimasi komponen variansinya. Permasalahannya adalah bagaimana menentukan estimasi dan uji eksak komponen variansi pada model random klasifikasi dua arah dengan data tidak seimbang.

Wald, *1940* merupakan orang pertama yang menerangkan proses uji eksak untuk model klasifikasi satu arah dan dua arah tanpa interaksi pada data tidak seimbang. Dengan dua pendekatan yang berbeda, *Spjotvoll*, *1968* dan *Thomsen*, *1975* mengembangkan uji eksak tentang komponen variansi pada model random klasifikasi dua arah dengan interaksi untuk data tidak seimbang. Sedangkan estimasi komponen variansi pada model random klasifikasi dua arah dengan data tidak seimbang disajikan oleh *Searle 1971* dan *Searle*, *Casella*, *McCulloch 1992*.

Estimasi Komponen Variansi

Bentuk model random klasifikasi dua arah dengan data tidak seimbang yang dibahas adalah

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_i + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk};\ i = 1, 2, \cdots, r;\ j = 1, 2, \cdots, s;\ k = 1, 2, \cdots, n_{ij} \quad (1)$$

dengan: $n_{ij} \geq 1$ untuk setiap (*i*, *j*).

y_{ijk} observasi ke–*k* dalam taraf ke–*i* faktor α dan taraf ke–*j* faktor β

μ parameter konstan tidak diketahui

$\alpha_j \sim N(0, \sigma^2_\alpha)$; $\beta_j \sim N(0, \sigma^2_\beta)$; $(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\alpha\beta})$; $e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2_e)$

Dengan menggunakan metoda analisis variansi diperoleh estimasi untuk masing-masing variansi dari model Persamaan (1), yaitu sebagai berikut:

(i). Ekspektasi jumlah kuadrat faktor α

$$E(SS_\alpha)=\left(n_{..}-\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{i.}^2}{n_{..}}\right)\sigma_\alpha^2+\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{i.}}-\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{.j}}{n_{..}}\right)\sigma_\beta^2+\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{i.}}-\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{..}}\right)\sigma_{\alpha\beta}^2+(r-1)\sigma_e^2 \quad (2)$$

(ii). Ekspektasi jumlah kuadrat faktor β

$$E(SS_\beta)=\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{ij}^2}{n_{.j}}-\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{i.}}{n_{..}}\right)\sigma_\alpha^2+\left(n_{..}-\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{.j}^2}{n_{..}}\right)\sigma_\beta^2+\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{ij}^2}{n_{.j}}-\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{..}}\right)\sigma_{\alpha\beta}^2+(s-1)\sigma_e^2 \quad (3)$$

(iii). Ekspektasi jumlah kuadrat interaksi antara faktor α dan faktor β

$$E(SS_{\alpha\beta})=\left(\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{i.}^2}{n_{..}}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{ij}^2}{n_{.j}}\right)\sigma_\alpha^2+\left(\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{i.}^2}{n_{..}}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{i.}}\right)\sigma_\beta^2$$

$$+\left(n_{..}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{i.}}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r}n_{ij}^2}{n_{.j}}+\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}^2}{n_{..}}\right)\sigma_{\alpha\beta}^2+\left[(r-1)(s-1)\right]\sigma_e^2 \quad (4)$$

(iv). Ekspektasi jumlah kuadrat kesalahan

$$E(SS_e)=\left(n_{..}-rs\right)\sigma_e^2 \quad (5)$$

dengan: $n_{ij}=\text{Jumlah pengamatan pada sel ke-}(i,j)$

$n_{i.}=\text{Jumlah pengamatan taraf ke-}i\text{ faktor }\alpha=\sum_{j=1}^{s}n_{ij}$

$n_{.j}=\text{Jumlah pengamatan taraf ke-}j\text{ faktor }\beta=\sum_{i=1}^{r}n_{ij}$

$n_{..}=\text{Jumlah semua pengamatan }=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}$

$y_{i..}=\text{Jumlah nilai pengamatan dalam taraf ke-}i\text{ faktor }\alpha$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}}y_{ijk}=n_{i.}\mu+n_{i.}\alpha_i+\sum_{j=1}^{s}n_{ij}\beta_j+\sum_{j=1}^{s}n_{ij}(\alpha\beta)_{ij}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}}e_{ijk}$$

$y_{.j.}=\text{Jumlah nilai pengamatan dalam taraf ke-}j\text{ faktor }\beta$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_{ij}}y_{ijk}=n_{.j}\mu+\sum_{i=1}^{r}n_{ij}\alpha_i+n_{.j}\beta_j+\sum_{i=1}^{r}n_{ij}(\alpha\beta)_{ij}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_{ij}}e_{ijk}$$

$y_{ij.}=\text{Jumlah nilai pengamatan dalam taraf ke-}i\text{ faktor }\alpha\text{ dan taraf ke-}j\text{ faktor }\beta$

$$=\sum_{k=1}^{n_{ij}}y_{ijk}=n_{ij}\mu+n_{ij}\alpha_i+n_{ij}\beta_j+n_{ij}(\alpha\beta)_{ij}+\sum_{k=1}^{n_{ij}}e_{ijk}$$

$y_{\ldots} =$ Jumlah nilai semua pengamatan

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = n_{..}\mu + \sum_{i=1}^{r} n_{i.}\alpha_i + \sum_{j=1}^{s} n_{.j}\beta_j + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}(\alpha\beta)_{ij} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

Untuk menyederhanakan penulisan, didefinisikan

$$p_1 = \sum_{i=1}^{r} n_{i.}^2 \ ; \quad p_2 = \sum_{j=1}^{s} n_{.j}^2 \ ; \quad p_5 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}^2 \ ; \quad N = n_{..} \ ; \quad q = rs \ ; \quad N' = (r-1)(s-1)$$

$$p_3 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sum_{j=1}^{s} n_{ij}^2}{n_{i.}} \ ; \quad p_4 = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{i=1}^{r} n_{ij}^2}{n_{.j}} \ ; \quad p'_k = \frac{p_k}{N}$$

sehingga keempat persamaan di atas, yaitu Persamaan (2), (3), (4), dan (5) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} N - p'_1 & p_3 - p'_2 & p_3 - p'_5 & r-1 \\ p_4 - p'_1 & N - p'_2 & p_4 - p'_5 & s-1 \\ p'_1 - p_4 & p'_2 - p_3 & N - p_3 - p_4 + p'_5 & N' \\ 0 & 0 & 0 & N-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\alpha^2 \\ \hat{\sigma}_\beta^2 \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 \\ \hat{\sigma}_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SS_\alpha \\ SS_\beta \\ SS_{\alpha\beta} \\ SS_e \end{bmatrix} \tag{6}$$

dengan $\hat{\sigma}_\alpha^2$, $\hat{\sigma}_\beta^2$, $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2$, dan $\hat{\sigma}_e^2$ secara berturut-turut merupakan penduga dari σ_α^2, σ_β^2, $\sigma_{\alpha\beta}^2$, dan σ_e^2.

Dari Persamaan (6) diperoleh estimator variansi kesalahan

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SS_e}{N-q} = MS_e \ \text{dan} \ \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\alpha^2 \\ \hat{\sigma}_\beta^2 \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} SS_\alpha - (r-1)MS_e \\ SS_\beta - (s-1)MS_e \\ SS_{\alpha\beta} - (N')MS_e \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} N - p' & p_3 - p'_2 & p_3 - p'_5 \\ p_4 - p'_1 & N - p'_2 & p_4 - p'_5 \\ p'_1 - p_4 & p'_2 - p_3 & N - p_3 - p_4 + p'_5 \end{bmatrix}$$

Uji Eksak Komponen Variansi

Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{1}_{n_{..}} + \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_3(\boldsymbol{\alpha\beta}) + \mathbf{e} \tag{7}$$

dengan: $\mathbf{y}$ vektor observasi berordo $N \times 1$; $\mathbf{1}_{n_{..}}$ vektor satuan berordo $n_{..} = N$

$\mathbf{X}_1 = \left\{_d \mathbf{1}_i \right\}_{i=1}^{i=r}$ berordo $N \times r$; $\mathbf{X}_2 = \left\{_c \left\{_d \mathbf{1}_{ij} \right\}_{i=1}^{i=r} \right\}_{j=1}^{j=s}$ berordo $N \times s$

$\mathbf{X}_3 = \left\{_d \mathbf{1}_{ij} \right\}_{i=1,\ j=1}^{i=r,\ j=s}$ berordo $N \times rs$

dengan matriks dispersinya

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{X}_1\mathbf{X}'_1\sigma_\alpha^2 + \mathbf{X}_2\mathbf{X}'_2\sigma_\beta^2 + \mathbf{X}_3\mathbf{X}'_3\sigma_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{I}_N\sigma_e^2$$

Definisikan $\bar{y}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \frac{y_{ijk}}{n_{ij}}$ sebagai rata-rata sampel sel ke (i, j), maka Persamaan (1) menjadi

$$\bar{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_i + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{e}_{ij} \ ; \ i = 1, 2, \cdots, r \ ; \ j = 1, 2, \cdots, s \ \text{dengan} \ \bar{e}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \frac{e_{ijk}}{n_{ij}} \tag{8}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\bar{\mathbf{y}} = \mu \mathbf{1}_{rs} + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{I}_{rs}(\boldsymbol{\alpha\beta}) + \bar{\mathbf{e}} \tag{9}$$

dengan: $\mathbf{1}_{rs} = (1_{11}, 1_{12}, \cdots, 1_{rs})'$; $\bar{\mathbf{e}} = (\bar{e}_{11}, \bar{e}_{12}, \cdots, \bar{e}_{rs})'$

$\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{1}_s$; $\mathbf{B}_2 = \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{I}_s$; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)'$; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)'$

$(\boldsymbol{\alpha\beta}) = [(\alpha\beta)_{11}, (\alpha\beta)_{12}, \cdots, (\alpha\beta)_{1s}, \cdots, (\alpha\beta)_{r1}, (\alpha\beta)_{r2} \cdots, (\alpha\beta)_{rs}]'$

dan variansinya

$$Var(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}_1 \sigma_\alpha^2 + \mathbf{A}_2 \sigma_\beta^2 + \mathbf{I}_{rs} \sigma_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{K} \sigma_e^2$$

dengan: $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{J}_s)$; $\mathbf{A}_2 = (\mathbf{J}_r \otimes \mathbf{I}_s)$; $\mathbf{K} = diag\,(n_{11}^{-1}, n_{12}^{-1}, \cdots, n_{rs}^{-1})$

Karena $\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{A}_2$ matriks simetris, maka terdapat matriks ortogonal $\mathbf{P}$ berordo $rs \times rs$ sedemikian sehingga $\mathbf{PA}_1\mathbf{P}'$ dan $\mathbf{PA}_2\mathbf{P}'$ matriks diagonal dengan masing-masing elemen diagonalnya secara berturut-turut merupakan nilai eigen dari $\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{A}_2$.

Misalkan $\mathbf{z} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}$ dengan $\mathbf{P}$ matriks ortogonal berordo $rs \times rs$ yang baris pertamanya $(rs)^{-1/2}\mathbf{1}'_{rs}$, maka variansinya

$$Var(\mathbf{z}) = \mathbf{PA}_1\mathbf{P}'\sigma_\alpha^2 + \mathbf{PA}_2\mathbf{P}'\sigma_\beta^2 + \mathbf{I}_{rs}\sigma_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{K}\sigma_e^2$$

***Lemma* 1:** (i). *rank* $(\mathbf{B}_1) = r$; (iii). *rank* $(\mathbf{B}_1 \vdots \mathbf{B}_2) = r + s - 1$

(ii). *rank* $(\mathbf{B}_2) = s$; (iv). *rank* $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ = *rank* $(\mathbf{B}_1 \vdots \mathbf{B}_2)$

Jelas rank$(\mathbf{A}_1)$ = rank$(\mathbf{B}_1)$, $\mathbf{A}_1$ mempunyai nilai eigen *s* sebanyak *r* dan nol sebanyak *r*(*s* – 1). $\mathbf{PA}_1\mathbf{P}'$ mempunyai *r* elemen diagonal sama dengan *s* dan lainnya nol. Dengan cara yang sama, $\mathbf{PA}_2\mathbf{P}'$ mempunyai *s* elemen diagonal sama dengan *r* dan lainnya nol.

Dari (iii) dan (iv), matriks $(\mathbf{PA}_1\mathbf{P}' + \mathbf{PA}_2\mathbf{P}')$ mempunyai (*r* + *s* – 1) elemen diagonal tidak nol. Bila elemen diagonal $\mathbf{PA}_1\mathbf{P}'$ tidak sama dengan nol, elemen diagonal yang bersesuaian pada $\mathbf{PA}_2\mathbf{P}'$ sama dengan nol, kecuali baris pertama dan begitu sebaliknya.

Misalkan vektor **z** dipartisi menjadi $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}'_\alpha, \mathbf{z}'_\beta, \mathbf{z}'_{\alpha\beta})'$ dengan z_1 elemen pertama dari **z,** $\mathbf{z}_\alpha$ vektor kolom berordo (*r* – 1), $\mathbf{z}_\beta$ vektor kolom berordo (*s* – 1), dan $\mathbf{z}_{\alpha\beta}$ vektor kolom berordo (*r* – 1)(*s* – 1) dan vektor $\mathbf{z}_\alpha$, $\mathbf{z}_\beta$, dan $\mathbf{z}_{\alpha\beta}$ masing-masing berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansinya berturut-turut adalah

$$Var(\mathbf{z}_\alpha) = (s\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2)\mathbf{I}_{r-1} + \mathbf{K}_1\sigma_e^2$$

$$Var(\mathbf{z}_\beta) = (r\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2)\mathbf{I}_{s-1} + \mathbf{K}_2\sigma_e^2$$

$$Var(\mathbf{z}_{\alpha\beta}) = \sigma_{\alpha\beta}^2\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)} + \mathbf{K}_3\sigma_e^2$$

dengan $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, dan $\mathbf{K}_3$ submatriks dari $\mathbf{PKP}'$ yang bersesuaian dengan $\mathbf{z}_\alpha$, $\mathbf{z}_\beta$, dan $\mathbf{z}_{\alpha\beta}$.

Selanjutnya didefinisikan vektor **u** sebagai

$$\mathbf{u} = (\mathbf{z}'_\alpha, \mathbf{z}'_\beta, \mathbf{z}'_{\alpha\beta})' \tag{10}$$

diperoleh $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ dan $Var(\mathbf{u}) = diag\,(\delta_1\mathbf{I}_{r-1}, \delta_2\mathbf{I}_{s-1,} \delta_3\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)}) + \mathbf{L}\sigma_e^2$

dengan $\delta_1 = s\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$, $\delta_2 = r\sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2$, $\delta_3 = \sigma_{\alpha\beta}^2$

L submatriks $\mathbf{PKP}'$ yang terkait dengan **u** dan dinyatakan dengan

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}'_{12} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}'_{13} & \mathbf{K}'_{23} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

L mempunyai rank *rs* – 1, berarti non-singular

$$\mathbf{K}_{12}\,\sigma_e^2 = E(\mathbf{z}_\alpha\,\mathbf{z}'_\beta)\,;\; \mathbf{K}_{13}\,\sigma_e^2 = E(\mathbf{z}_\alpha\,\mathbf{z}'_{\alpha\beta})\,;\; \mathbf{K}_{23}\,\sigma_e^2 = E(\mathbf{z}_\beta\,\mathbf{z}'_{\alpha\beta})$$

Selanjutnya vektor $\bar{\mathbf{y}}$ pada Persamaan (9) ditulis dalam bentuk $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\mathbf{y}$ dengan **y** vektor observasi dalam persamaan (7) dan **D** penjumlahan langsung (*direct sum*) yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{D} = \bigoplus_{i,j} \left(\frac{\mathbf{1}'_{n_{ij}}}{n_{ij}} \right)$$

Dari Persamaan (1) dan (8) diperoleh jumlah kuadrat kesalahan $Q = \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$

atau dalam dalam bentuk matriks

$$Q = \mathbf{y}'\mathbf{R}\mathbf{y} \tag{12}$$

dengan **R** matriks berordo $N \times N$ yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{n_{..}} - \bigoplus_{i,j} \left(\frac{\mathbf{J}_{n_{ij}}}{n_{ij}} \right) \tag{13}$$

dengan $\mathbf{J}_{n_{ij}}$ matriks satuan berordo $n_{ij} \times n_{ij}$ dan **R** matriks idempoten dengan rank $N - rs$ sehingga diperoleh

$$\mathbf{DR} = \mathbf{RX}_1 = \mathbf{RX}_2 = \mathbf{RX}_3 = \mathbf{0},\;\; \mathbf{D\Sigma R} = \mathbf{0}, \text{ dan } \frac{\mathbf{R\Sigma}}{\sigma_e^2} = \mathbf{R}$$

Karena $\bar{\mathbf{y}}$ dan **u** independen terhadap *Q*, maka $\dfrac{Q}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{N-rs}$

Selanjutnya **R** ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{R} = \mathbf{C\Lambda C}' \tag{14}$$

dengan **C** matriks ortogonal berordo $N \times N$ dan $\mathbf{\Lambda}$ matriks diagonal berordo $N \times N$ yang merupakan eigenvalue dari **R**. Diasumsikan $N > 2rs - 1$, sebab **R** idempoten dengan rank $N - rs > rs - 1$. Selanjutnya $\mathbf{\Lambda}$ dan **C** dipartisi menjadi $\mathbf{\Lambda} = diag(\mathbf{I}_{v_1}, \mathbf{I}_{v_2}, \mathbf{0})$ dan $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 : \mathbf{C}_2 : \mathbf{C}_3]$, dengan $v_1 = rs - 1$; $v_2 = N - rs + 1$, **0** matriks nol berordo $rs \times rs$, $\mathbf{C}_1$ berordo $N \times v_1$, $\mathbf{C}_2$ berordo $N \times v_2$, $\mathbf{C}_3$ berordo $N \times rs$, $\mathbf{C}'_i\mathbf{C}_i = \mathbf{I}$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{C}'_i\mathbf{C}_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$.

Persamaan (14) selanjutnya ditulis sebagai

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}'_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2 \tag{15}$$

Dari Persamaan (12) dan (15), jumlah kuadrat kesalahan *Q* dapat dipartisi menjadi

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{16}$$

dengan $Q_1 = \mathbf{y}'\mathbf{C}_1\mathbf{C}'_1\mathbf{y}$ dan $Q_2 = \mathbf{y}'\mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2\mathbf{y}$

Karena jumlah kuadrat Q_1, Q_2, dan vektor random **u** pada (10) independen, maka

$$\frac{Q_1}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{v_1} \quad \text{dan} \quad \frac{Q_2}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{v_2}$$

Selanjutnya perhatikan vektor random $\boldsymbol{\omega}$ yang didefinisikan oleh

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} + (\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{C}'_1\mathbf{y} \tag{17}$$

dengan λ_{maks} nilai eigen terbesar dari matriks **L** pada persamaan (11), dan $(\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})^{\frac{1}{2}}$ matriks simetris dengan nilai eigen sama dengan akar kuadrat nilai eigen

$(\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})$ yang non-negatif. Di sini jelas $\mathbf{L}$ matriks real simetris, berarti semua nilai eigennya real. Jadi $(\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})$ matriks semidefinit positif.
Kemudian partisi $\boldsymbol{\omega}$ seperti $\mathbf{u}$ dalam (10) menjadi $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}'_\alpha, \boldsymbol{\omega}'_\beta, \boldsymbol{\omega}'_{\alpha\beta})'$ dengan $\boldsymbol{\omega}'_\alpha$ berordo $r-1$, $\boldsymbol{\omega}'_\beta$ berordo $s-1$, dan $\boldsymbol{\omega}'_{\alpha\beta}$ berordo $(r-1)(s-1)$.
Berikut diberikan lemma tentang sifat-sifat distribusional dari vektor random di atas.

***Lemma* 2:** *Diberikan* $\boldsymbol{\omega}$ *seperti dalam persamaan* (16), *dipartisi menjadi*

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}'_\alpha, \boldsymbol{\omega}'_\beta, \boldsymbol{\omega}'_{\alpha\beta})'$$

Maka: (i). $E(\boldsymbol{\omega}_\alpha) = E(\boldsymbol{\omega}_\beta) = E(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}) = \mathbf{0}$

(ii). $\boldsymbol{\omega}_\alpha, \boldsymbol{\omega}_\beta$, dan $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}$ *adalah vektor random berdistribusi normal independen dengan matriks dispersi*

$$Var(\boldsymbol{\omega}_\alpha) = (s\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{r-1}$$

$$Var(\boldsymbol{\omega}_\beta) = (r\sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{s-1}$$

$$Var(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}) = (\sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)}$$

(iii). $\boldsymbol{\omega}_\alpha, \boldsymbol{\omega}_\beta$, dan $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}$ *independen terhadap* Q_2

<u>Bukti :</u>

(i). Kalikan ruas kiri dan ruas kanan persamaan (13) dengan $\mathbf{1}_{n_{..}}$ diperoleh

$$\mathbf{R1}_{n_{..}} = \left[\mathbf{I}_{n_{..}} - \bigoplus_{i,j}\left(\frac{\mathbf{J}_{n_{ij}}}{n_{ij}}\right)\right]\mathbf{1}_{n_{..}} = \mathbf{0}$$

Persamaan (14) dapat ditulis

$$(\mathbf{C}_1\mathbf{C}'_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2)\mathbf{1}_{n_{..}} = \mathbf{0}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\mathbf{C}'_1\mathbf{1}_{n_{..}} = \mathbf{0},\ E(\mathbf{C}'_1\mathbf{y}) = \mathbf{C}'_1\mathbf{1}_{n_{..}}\mu = \mathbf{0}, \text{ dan } E[\boldsymbol{\omega}] = E[\mathbf{u}] + E[(\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}'_1\mathbf{y}] = \mathbf{0}$$

Jadi

$$E[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_\alpha \\ \boldsymbol{\omega}_\beta \\ \boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

(ii). Jelas bahwa $\boldsymbol{\omega}$ berdistribusi normal. Klaim $\mathbf{u}$ independen terhadap $\mathbf{C}'_1\mathbf{y}$. Untuk menunjukkan ini, perhatikan kembali persamaan $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$ independen terhadap jumlah kuadrat kesalahan Q dan $\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Dengan argumen yang yang sama pada (i) diperoleh

$$Cov[\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}'\mathbf{C}_1] = \mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$$

Karena $\mathbf{u}$ subvektor dari $\mathbf{z} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}$, maka $\mathbf{u}$ independen terhadap $\mathbf{C}'_1\mathbf{y}$ seperti yang diklaim. Matriks dispersi dari $\boldsymbol{\omega}$ adalah

$$Var(\boldsymbol{\omega}) = Var(\mathbf{u}) + (\lambda_{\text{maks}}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})^{1/2}\mathbf{C}'_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1(\lambda_{\text{maks}}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})^{1/2}$$

dengan $\mathbf{C}'_1\mathbf{X}_i = \mathbf{0},\ i = 1, 2, 3$ dan $\mathbf{C}'_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}'_1\mathbf{C}_1\sigma_e^2 = \mathbf{I}_{v_1}\sigma_e^2$, sehingga diperoleh

$$Var(\boldsymbol{\omega}) = diag[(\delta_1\mathbf{I}_{r-1}, \delta_2\mathbf{I}_{s-1}, \delta_3\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)} + \mathbf{L}\sigma_e^2 + (\lambda_{maks}\mathbf{I}_{v_1} - \mathbf{L})\sigma_e^2$$

atau

$$Var(\boldsymbol{\omega}) = diag[(\delta_1 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{r-1}, (\delta_2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{s-1},$$
$$(\delta_3 + \lambda_{\text{maks}}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)}]$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{\omega}_\alpha, \boldsymbol{\omega}_\beta$, *dan* $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}$ independen dengan matriks dispersinya berturut-turut adalah

$$Var(\boldsymbol{\omega}_\alpha) = (s\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{r-1}$$
$$Var(\boldsymbol{\omega}_\beta) = (r\sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{s-1}$$
$$Var(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}) = (\sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2)\mathbf{I}_{(r-1)(s-1)}$$

(iii). Karena Q_2 partisi dari Q, maka Q_2 juga independen terhadap $\mathbf{u}$. Karenanya $\mathbf{C}_1'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, maka Q_2 juga independen terhadap $\mathbf{C}_1'\mathbf{y}$. Karena Q_2 independen terhadap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{C}_1'\mathbf{y}$, maka Q_2 independen terhadap $\boldsymbol{\omega}$ atau Q_2 independen terhadap $\boldsymbol{\omega}_\alpha, \boldsymbol{\omega}_\beta$, dan $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}$.

Dari Lemma 2 disimpulkan bahwa jumlah kuadrat faktor α , jumlah kuadrat faktor β, jumlah kuadrat interaksi antara faktor α dan β, berturut-turut dinyatakan dengan $\mathbf{SS}_\alpha = \omega_\alpha'\omega_\alpha$, $\mathbf{SS}_\beta = \omega_\beta'\omega_\beta$, $\mathbf{SS}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}'\omega_{\alpha\beta}$, dan Q_2 berdistribusi secara independen dan

$$\mathbf{SS}_\alpha \Big/ (s\sigma_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2) \sim \chi_{r-1}^2$$
$$\mathbf{SS}_\beta \Big/ (r\sigma_\beta^2 + \sigma_\beta^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2) \sim \chi_{s-1}^2$$
$$\mathbf{SS}_{\alpha\beta} \Big/ (\sigma_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{maks}\sigma_e^2) \sim \chi_{(r-1)(s-1)}^2$$
$$Q_2 \Big/ \sigma_e^2 \sim \chi_{v_2}^2$$

Dengan demikian diperoleh suatu uji statistik yang merupakan uji eksak untuk masing-masing variansi, yaitu

$$F = \frac{\mathbf{MS}_\alpha}{\mathbf{MS}_{\alpha\beta}} = \frac{\mathbf{SS}_\alpha \big/ (r-1)}{\mathbf{SS}_{\alpha\beta} \big/ [(r-1)(s-1)]} \quad \text{untuk uji hipotesis } H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 \text{ vs } H_a : \sigma_\alpha^2 \neq 0$$

dengan kriteria uji, tolak H_0 pada level signifikan α jika $F_{hitung} \geq F_{\alpha,[\,(r-1),\,(r-1)(s-1)]}$

$$F = \frac{\mathbf{MS}_\beta}{\mathbf{MS}_{\alpha\beta}} = \frac{\mathbf{SS}_\beta \big/ (s-1)}{\mathbf{SS}_{\alpha\beta} \big/ [(r-1)(s-1)]} \quad \text{untuk uji hipotesis } H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \text{ vs } H_a : \sigma_\beta^2 \neq 0$$

dengan kriteria uji, tolak H_0 pada level signifikan α jika $F_{hitung} \geq F_{\alpha,[\,(s-1),\,(r-1)(s-1)]}$

dan untuk menguji hipotesis

$$F = \frac{v_2}{\lambda_{maks}} \frac{\mathbf{MS}_{\alpha\beta}}{Q_2} = \frac{\mathbf{SS}_{\alpha\beta} \big/ [(r-1)(s-1)]}{\lambda_{maks} Q_2 \big/ v_2} \quad \text{untuk uji hipotesis } H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 \text{ vs } H_a : \sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0$$

dengan kriteria uji, tolak H_0 pada level signifikan α jika $F_{hitung} \geq F_{\alpha,[(r-1)(s-1),\, v_2]}$

Berikut diberikan lemma yang memberikan batasan nilai λ_{maks} dalam bentuk umum.

***Lemma* 3:** *Nilai eigen terbesar dari matriks* **L**, λ_{maks} *memenuhi interval ketidaksamaan*

$$\frac{1}{rs}\sum_{i,j}\frac{1}{n_{ij}} \leq \lambda_{maks} \leq \frac{1}{n^{(1)}}$$

<u>Bukti :</u>

Perhatikan matriks ortogonal $\mathbf{P}$ dengan baris pertamanya $(rs)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{rs}'$ yang mendiagonalisasi $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1'$ dan $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2'$ secara simultan. Diberikan $\mathbf{P}_1$ submatriks dari $\mathbf{P}$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris pertama **P,** diperoleh persamaan

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1' = \mathbf{I}_{rs-1}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1' + \frac{1}{rs}\mathbf{J}_{rs} = \mathbf{I}_{rs}$$

λ_{maks} nilai eigen terbesar dari $\mathbf{L} = \mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1'$, yaitu $\lambda_{maks} = e_{maks}(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\mathbf{P}_1')$. Jika $n^{(1)}$ menyatakan frekuensi sel terkecil, maka $\left(n^{(1)}\right)\mathbf{P}_1\mathbf{P}' - \mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1'$ adalah semidefinit positif, maka

$$e_{maks}(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\mathbf{P}_1') \leq \frac{1}{n^{(1)}} e_{maks}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1') \leq \frac{1}{n^{(1)}}$$

Ini juga benar bahwa λ_{maks} besar dari atau sama dengan jumlah nilai eigen $\mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1'$ dibagi dengan rs – 1 (rata-rata nilai eigen $\mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1'$).
Maka

$$e_{maks}(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\mathbf{P}_1') \geq \frac{1}{(rs-1)} tr\,(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1')$$

tetapi,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\,\mathbf{P}_1') = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_1'\mathbf{P}_1\mathbf{K}) = \mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{I}_{rs} - \frac{1}{rs}\mathbf{J}_{rs}\right)\mathbf{K}\right] = \mathrm{tr}(\mathbf{K}) - \frac{1}{rs}\mathrm{tr}(\mathbf{1}_{rs}\mathbf{1}_{rs}'\,\mathbf{K})$$

$$= \mathrm{tr}(\mathbf{K}) - \frac{1}{rs}\mathbf{1}_{rs}'\mathbf{K}\,\mathbf{1}_{rs} = \sum_{i,j}\frac{1}{n_{ij}} - \frac{1}{rs}\sum_{i,j}\frac{1}{n_{ij}}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$e_{maks}(\mathbf{P}_1\mathbf{K}\mathbf{P}_1') \geq \frac{1}{rs}\sum_{i,j}\frac{1}{n_{ij}} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{rs}\sum_{i,j}\frac{1}{n_{ij}} \leq \lambda_{maks} \leq \frac{1}{n^{(1)}}$$

Kesimpulan
Dengan memanfaatkan ilmu tentang aljabar matriks dan statistika matematika dapat diturunkan estimasi dan uji eksak dari komponen variansi pada model random klasifikasi dua arah dengan data tidak seimbang.

Contoh Perhitungan

Dari beberapa jenis obat dan terapi alternatif kanker rahim, diambil dua jenis obat dan dua jenis terapi alternatif kanker rahim secara random, kemudian dikombinasikan. Datanya, setelah disandi, diberikan pada tabel berikut.

Jenis Obat	Jenis Terapi Alternatif	
	1	2
1	13, 7, 10	2
2	6	6, 9, 3

(Data fiktif)

a. Perhitungan Estimasi

	y_{ijk}		$y_{i..}$		n_{ij}		$n_{i.}$		$\bar{y}_{ij}$		$\bar{y}_{i..}$
	13, 7, 10	2	32		3	1	4		10	2	8
	6	6, 9, 3	24		1	3	4		6	6	8
$y_{.j.}$	36	20	$56 = y_{...}$	$n_{.j}$	4	4	$8 = n_{..}$	$\bar{y}_{.j.}$	9	5	$7 = \bar{y}_{...}$

$$SS_\alpha = 4(8-7)^2 + 4(6-7)^2 = 8,\ SS_\beta = 4(9-7)^2 + 4(5-7)^2 = 32$$

$$SS_{\alpha\beta} = 3(10)^2 + 1(2)^2 + 1(6)^2 + 3(6)^2 - [4(8)^2 + 4(6)^2]$$
$$-[4(9)^2 + 4(5)^2] + 8(7)^2 = 16$$

$$SS_e = (13-10)^2 + (7-10)^2 + (10-10)^2 + (2-2)^2 + (6-6)^2$$
$$+(6-6)^2 + (9-6)^2 + (3-6)^2 = 36$$

$$p_1 = 4^2 + 4^2 = 32,\quad p_2 = 4^2 + 4^2 = 32,\ p_3 = \frac{3^2+1^2}{4} + \frac{1^2+3^2}{4} = 5,\ p_1' = \frac{32}{8} = 4$$

$$p_4 = \frac{3^2+1^2}{4} + \frac{1^2+3^2}{4} = 5,\ p_5 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 20,\ p_2' = \frac{32}{8} = 4,\ p_5' = \frac{20}{8} = 2\tfrac{1}{2}$$

sehingga diperoleh bentuk matriksnya

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & 2\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\beta^2 \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 \\ \sigma_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \\ 16 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\beta^2 \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 \\ \sigma_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2000 & -0{,}1333 & -0{,}3333 & 0{,}0667 \\ -0{,}1333 & 0{,}2000 & -0{,}3333 & 0{,}0667 \\ 0{,}1333 & 0{,}1333 & 0{,}6667 & -0{,}2333 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \\ 16 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}6000 \\ 2{,}4000 \\ 7{,}6000 \\ 9{,}0000 \end{bmatrix}$$

b. Perhitungan Uji Eksak

Dari data diperoleh komponen-komponen yang diperlukan dalam perhitungan, yaitu :

$$\mathbf{B}1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{B}2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{I}4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0{,}6667 & -0{,}3333 & 0 \\ -0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 \\ 0 & & 0{,}6667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = [13 \quad 7 \quad 10 \quad 2 \quad 6 \quad 6 \quad 9 \quad 3]';\ \ Q_1 = 19{,}8235\ ;\ \ Q_2 = 16{,}1773\ ;\ \ \lambda_{maks} = 1$$

$$\mathbf{SS}_\alpha = \boldsymbol{\omega}'_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha = 3{,}0232\ ;\ \ \mathbf{SS}_\beta = \boldsymbol{\omega}'_\beta \boldsymbol{\omega}_\beta = 3{,}0232\ ;\ \ \mathbf{SS}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\omega}'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta} = 1{,}6079$$

dengan masing-masing uji hipotesisnya adalah sebagai berikut:

(i). Hipotesis Faktor α

$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ *vs* $H_a : \sigma_\alpha^2 \neq 0$ dengan tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ diperoleh

$$F_{tabel} = 161{,}4 > 1{,}88 = F_{hitung}$$

Berarti, tolak H_0 pada tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ dan disimpulkan terdapat perbedaan kemanjuran obat terhadap tingkat kesembuhan penyakit yang diobati.

(ii). Hipotesis Faktor β

$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ vs $H_{\mathrm{a}} : \sigma_\beta^2 \neq 0$ dengan tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ diperoleh

$$F_{tabel} = 161{,}4 > 1{,}88 = F_{hitung}$$

Berarti, tolak H_0 pada tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ dan disimpulkan terdapat perbedaan kemanjuran terapi alternatif terhadap tingkat kesembuhan penyakit yang diterapi.

(iii). Hipotesis Interaksi Faktor α dan β

$H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ vs $H_{\mathrm{a}} : \sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0$ dengan tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ diperoleh

$$F_{tabel} = 10{,}13 > 0{,}298 = F_{hitung}$$

Berarti, tolak H_0 pada tingkat signifikan $\alpha = 0{,}05$ dan disimpulkan terjadi interaksi antara obat dan terapi alternatif dalam penyembuhan penyakit yang diobati dan diterapi.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada Prof. Dr. Suryo Guritno, M.Stat., Guru Besar bidang statistika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, yang telah banyak memberikan sumbang saran

dengan penuh kesabaran atas penyelesaian tulisan ini.

Daftar Pustaka

Anton, H., 1987, Aljabar Linear Elementer, *Ed. Kelima*, *Alih Bahasa* : *P. Silaban*, *Erlangga*, *Jakarta*.

Bain, L. J., and Engelhardt, M., 1992, Introduction to Probability and Mathematical Statistics, *2nd ed.*, *Duxbury Press*, *Belmont*, *California*.

Gallo, J. and Khuri, A. I., 1990, Exact Test for the Random and Fixed Effects in an Unbalanced Mixed Two-Way Cross-Clasification Model, *Biometrics* ***46***, *1087 – 1095*.

Khuri, A. J., and Littell, R. C., 1987, Exact Test for the Main Effects Variance Components in an Unbalanced Random Two – Way Model, *Biometrics* ***43***, *545 – 560*.

Magnus, J. R. and Neudecker, H., 1999, Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, *Revised Edition*, *John Wiley & Sons Ltd.*, *Chichester*.

Searle, S. R., 1982, Matrix Algebra Useful for Statistics, *John Wiley & Sons Inc.*, *New York*.

Searle, S. R., Casella, G., and McCulloch, C. E., 1992, Variance Components, *John Wiley & Sons*, *Inc.*, *New York*.

Thomsen, I., 1975, Testing Hypothesis in Unbalanced Variance Component Models for Two-Way Layouts, *Annals of Statistics* ***3***, *257 – 265*.

Wald, A., 1940, A Note on the Analysis of Variance with Unequal Class Frequencies, *Annals of Mathematical Statistics* ***11***, *96 – 100*.