J. Pilar Sains 5(2): 31-34,2006

ISSN 1412-5595

Selisih Dua Bilangan Bulat Yang Terbentuk Dari Angka-Angka Yang Sama Terbagi Sembilan

Syofni
Prodi Pendidikan Matematika Jurusan PMIPA FKIP
Universitas Riau Pekanbaru

Abstract
The integers which equivalent is the integer which formed by that same digit with the different arrange. Example, X and Y is any two integer which equivalent, so, the dispute from X and Y (X-Y or Y-X) divided of nine in symbolic way X-Y≡ 0 (modulo 9). Already done the searching of literature by doing either inductive approaching or deductive to prove that X-Y congruent 0 modulo 9.

Keyword: Integer number, congruency, by divided.

Pendahuluan

Bilangan bulat adalah suatu konsep abstrak dalam matematika yang dikenal dan digunakan orang mulai dari masa pra sekolah. Secara sistematis diajarkan dari kelas satu sekolah dasar sampai ke perguruan tinggi. Sehubungan dengan kegunaannya yang sangat luas dan mendukung perkembangan IPTEK, maka pengetahuan tentang bilangan bulat juga berkembang dengan pesat.

Sebuah pertanyaan yang diajukan oleh seorang teman (doktor matematika) pada suatu obrolan (tidak resmi) kepada peneliti adalah, "kenapa selisih (perbedaan) dua bilangan bulat yang terdiri dari angka-angka yang sama selalu habis dibagi 9". Berdasarkan beberapa contoh yang sempat diamati, ternyata memang menunjukkan kebenaran pemyataan secara induktif. Pertanyaan inilah yang mambuat peneliti terusik untuk melakukan studi literatur untuk menguji kebenaran pernyataan tersebut secara induktif dan deduktif

Sebagai contoh selisih bilangan 37285 dan 82537 adalah 45252 habis dibagi 9 karena 45252 = 9 x 5028. Selisih bilangan 78253 dan 52387 adalah 25866 habis dibagi 9. karena 25866 = 9 x 2874. Ada sebanyak 5! (120) buah bilangan yang dapat dibentuk dan bilangan 2,3,5,7 dan 8, yang selisih diantara 2 bilangan yang terbentuk akan habis dibagi 9. Sangat banyak contoh lain yang menunjukkan kebenaran pernyataan diatas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa, selisih dua bilangan bulat yang terbentuk dan angka-angka yang sama terbagi sembilan telah dibuktikan secara induktif.

Kekongruenan Bilangan Bulat

Definisi 1 (Keterbagian)
Bilangan bulat a disebut terbagi oleh bilangan bulat b jika ada bilangan bulat c sehingga a = bc, ditulis $b|a$ dibaca b membagi a atau a terbagi oleh b.

Definisi 2 (Kekongruenan)
Untuk a dan b anggota himpunan bilangan bulat dan m bilangan bulat posititif, berlaku, jika m adalah bilangan bulat positif yang membagi a-b ($m|a-b$) maka disebut a kongruen b modulo m dan ditulis $a \equiv b \pmod{m}$

Teorema 1 (Kekongruenan Sebagai Relasi Ekuivalen)

Untuk m bilangan bulat positif dan a,b sebarang bilangan bulat, didefinisikan \$ pada Z (himpunan bilangan bulat) dengan a \$ b jika dan hanya jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka berlaku.

1. \$ bersifat Refleksif yaitu a \$ a
2. \$ bersifat Symetris yaitu, jika a \$ b maka b \$ a
3. \$ bersifat Transitif yaitu, Jika a \$ b dan b \$ c maka a \$ c

Bukti:

1. \$ bersifat Refleksif, dikarenakan m membagi 0 berarti m membagi a – a jadi

$a \equiv a$ (modulo m) oleh sebab itu a \$ a.

2. \$ bersifat Symetris yaitu, jika a \$ b maka b \$ a, sebab;

Jika a \$ b berarti $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a = b + mt$, $b = a - mt$, $b = a + mr$ dengan

memisalkan $r = -t$ diperoleh $b \equiv a \pmod{m}$.

3. \$ bersifat Transitif yaitu, jika a \$ b dan b \$ c maka a \$ c, sebab;

Jika a \$ b dan b \$ c berarti $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ dan $a = b + mk$,

$b = c + ml$, maka $a = c + ml + mk$, $a = c + m(l + k)$, $a = c + mh$ untuk suatu l,k,h elemen bilangan bulat, berarti $a \equiv c \pmod{m}$, jadi a \$ c.

Berdasarkan pembuktian 1, 2 dan 3, berarti \$ adalah relasi ekivalen, jadi dapat disimpulkan bahwa relasi kekongruenan adalah relasi ekivalen ♦

Teorema 2

Untuk sebarang a,b,c dan d anggota himpunan bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif, berlaku hubungan, jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka,

1. $ac \equiv bd \pmod{m}$
2. $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$
3. $pa \equiv pb \pmod{m}$
4. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

Bukti:

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ berarti $a = b + mk$ dan $c = d + ml$ untuk suatu k dan l bilangan bulat, maka $ac = bd + mh$ sehingga $ac \equiv bd \pmod{m}$.

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ berarti $a = b + mk$ dan $c = d + ml$, maka

$a \pm c = b \pm d \pm m$ berarti $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

3. Berdasarkan $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + mk$ dan $pa = pb + mpk$ dengan p dan k juga bilangan bulat maka $pa \equiv pb \pmod{m}$

4.Jika $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + mk$, maka dengan menggunakan bagian 1 sebanyak n kali kan diperoleh $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ ♦

Teorema 3

Misalkan f (x) suatu polinom dengan koefesien bilangan bulat, yaitu

$f(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + d_2x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}x + dn$ dengan d_0, d_1, $\ldots d_n$ masing-masing adalah bilangan bulat. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

Bukti :

$a \equiv b \pmod{m}$ menggunakan teorema 2.(4) maka $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, $a^3 \equiv b^3 \pmod{m}$ dan seterusnya dengan menggunakan teorema 2(4) sebanyak n – 1 kali akan diperoleh

$a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Kemudian menggunakan teorema 2(3) maka $d_0a^n \equiv d_0b^n \pmod{m}$, $d_1a^{n-1} \equiv d_1b^{n-1}$, $d_2a^{n-2} \equiv d_2b^{n-2} \pmod{m}$ dan seterusnya dengan pangkat yang menurun sampai pada $d_{n-1}a \equiv d_{n-1}b \pmod{m}$ dan menurut teorema 1(1) $d_n \equiv d_n \pmod{m}$. Dilanjutkan dengan menggunakan teorema 2(2) berulang kali diperoleh,

$d_0a^n + d_1a^{n-1} + d_2a^{n-2} + \ldots d_{n-1}a + dn \equiv d_0b^n + d_1b^{n-1} + d_2b^{n-2} + \ldots + d_{n-1}b + d_n$ *(mod m) sehingga f(a)* $\equiv f(b)$ (mod m). ♦

Pembahasan

Sebarang bilangan bulat $X = a_0a_1a_2a_3 \ldots a_n$ dapat ditulis menjadi

$X = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2}10 + a_{n-1}10 + a_n$, sehingga dapat dipandang sebagai polinam $f(10) = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2}10 + a_{n-1}10 + a_n$ dan jumlah angka-angka pembentuk bilangan X adalah $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

<u>Akibat</u> Teorema 3

Jika X sebarang bilangan bulat dan S adalah jumlah angka-angka pembentuk bilangan X, X terbagi 9 jika dan hanya jika S terbagi 9.

Bukti :

$\Longrightarrow$

Mulai dari $10 \equiv 1$ (mod 9) maka $f(10) \equiv f(1)$ (mod 9) bila $X = f(10) = a_0a_1a_2a_3 \ldots a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$ maka $S = f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

X terbagi 9, berarti $X \equiv 0$ (mod 9) atau $f(10) \equiv 0$ (mod 9) karena $f(10) \equiv f(1)$ (mod 9) menggunakan teorema 1(2) maka $f(1) \equiv f(10)$ (mod 9), karena $f(10) \equiv 0$ (mod 9) maka menurut teorema 1(3) $f(1) \equiv 0$ (mod 9) jadi S akan terbagi 9.

$\Longleftarrow$

S terbagi 9, berarti $S \equiv 0$ (mod 9) atau $f(1) \equiv 0$ (mod 9), berdasarkan akibat teorema 3 maka $f(10) \equiv f(1)$ (mod 9) dengan Teorema 1(3) atau sifat transitif $f(10) \equiv 0$ (mod 9) jadi $X \equiv 0$ (mod 9) atau X terbagi 9. ♦

Definisi 3 (Permutasi

Jika $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ maka susunan yang berbeda yang dapat dibentuk dari elemen-elemen himpunan A disebut **permutasi** pada elemen A, dan banyaknya permutasi pada elemen A adalah n! (n faktorial).

Definisi 4 (Dua Bilangan Bulat Ekuivalen)

Dua bilangan bulat P dan Q disebut **ekuivalen** jika bilangan-bilangan ini tersusun dari angka-angka yang sama.

Teorema 4

Misalkan X adalah sebarang bilangan yang terdiri dari n+1 angka Y adalah bilangan yang mempunyai angka-angka yang sama dengan X, maka selisih X dan Y habis dibagi 9.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan bulat X, misalkan $X = a_0a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n$ dengan $0 \leq a_i \leq 9$ untuk $I \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Misalkan himpunan A mempunyai elemen bilangan-bilangan yang ekuivalen dengan X. Berdasarkan definisi 3 himpunan A akan mempunyai anggota sebanyak (n+1)!. Ambil sebarang Y elemen A, tanpa mengurangi sifat umumnya teorema, misalkan $Y = a_1a_0a_3a_2 \ldots a_na_{n-1}$.

Jika $X = f(10)_x = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2}10 + a_{n-1}10 + a_n$ dan

$Y = f(10)_y = a_1 10^n + a_0 10^{n-1} + a_3 10^{n-2} + a_2 10^{n-3} + \ldots + a_n 10 + a_{n-1}$ maka

$f(1)_x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ dan $f(1)_y = a_1 + a_0 + a_3 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n-1}$

Karena operasi penjumlahan bersifat komutatif maka $f(1)_x = f(1)_y$. Berdasarkan teorema 3 maka $f(10)_x \equiv f(1)_x$ (mod 9) dan $f(10)_y \equiv f(1)_y$(mod 9), menggunakan sifat symetris kekongruenan bilangan maka $f(1)_y \equiv f(10)_y$ (mod 9) dan karena $f(1)_x \equiv f(1)_y$ maka

$f(1)_x \equiv f(10)_y$ (mod 9). Dari pernyataan $f(10)_x \equiv f(1)_x$ (mod 9) dan $f(1)_x \equiv f(10)_y$ (mod 9) serta mengunakan sifat transitif kekongruenan diperoleh $f(10)_x \equiv f(10)_y$ (mod 9).

Jadi $f(10)_x - f(10)_y \equiv 0$ (mod 9) berarti $X - Y \equiv 0$ (modulo 9). ♦

Penutup

Berdasarkan uraian pada pembahasan diatas, dapat *disimpulkan* bahwa telah dibuktikan kebenaran pernyataan " selisih dua bilangan yang terbentuk dari angka-angka yang sama terbagi sembilan " secara penalaran induktif dan deduktif.

Daftar Pustaka

Burton, David. M. (1980). Elementary Number Theory, Boston : Allyn and Bacon.

Dudley, Underwood. (1969). *Elementary Number Theory.* San Fransisko: W. H. Freeman and Company.

Kartasasmita, Bana. (1982). *Pengantar Teori Bilangan.* Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Muhsetyo, G. (1997). *Dasar-dasar Teori Bilangan.* Malang : Universitas Negeri Malang.

Sukarman, H. (1995). *Materi Pokok Teori Bilangan,* Jakarta : depdikbud, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah.