J. Pilar Salns 5(2): 22-30,2006
© Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Riau
ISSN 1412-55J5

Nilal Tunal Anultas Naik dan Anuitas Turun Dengan Mempertimbangkan Tingkat Inflasi Konstan

M. D. H. Gamal, Dewi Utami Sitompul, Johannes Kho
Kelompok Matematika Finansial dan Aktuaria
Jurusan Matematika Fakultas Maternatika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Email:*mdhgamal@unri. ac.id; dewi.utami28@yahoo. com; johanneskho@yahoo.co.id*

Abstract
Given an interest rate *i* and an inflation rate *j*, both are constant and not equal to zero for n periods. For two cases $I > j$ and $i < j$, we can obtain the geometrically varying annuity and real cash flow present values from the increasing and decreasing immediate annuities.

Pendahuluan

Dalam melakukan investasi keuangan, investor perlu mempunyai suatu solusi yang digunakan dalam transaksi investasi. Solusi ini perlu dipertimbangkan guna memperkecil biaya kerugian yang mungkin terjadi, apatahlagi jika terjadi penurunan daya beli atau yang sering disebut inflasi.

Berkenaan dengan investasi ini diberikan dua solusi pada nilal tunai (*present value*) untuk masalah inflasi dengan asumsi bahwa tingkat inflasi selalu konstan dan tidak sama dengan nol selama n periode waktu (Joyce, 2000). NiIai tunai dengan anuitas yang sama pada setiap periode pembayaran dengan mengabaikan inflasi dan dengan pembayaran dilakukan setiap akhir periode diberikan oleh persamaan (1) (Eysell,2006) yaitu

$$PV = R\frac{\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{i} \qquad (1)$$

dengan PV adalah nilai tunai dan seluruh pembayaran, R besar pembayaran tiap periode, i tingkat bunga tiap periode, dan n periode pembayaran.

Rumusan pada persamaan (1) menjelaskan bahwa besar pembayaran (anuitas) yang harus dilakukan adalah sama. Namun ada juga anuitas yang tidak sama (berubah-ubah) dengan periode pembayaran yang sama (Farmer, 2000). Pembayaran yang berubah. ubah ini terbagi dua yaitu pembayaran yang berubah menaik (increasing) dan yang berubah menurun (decreasing).

Persamaan (1) dipengaruhi oleh dua faktor, yaitu tingkat bunga i, dan periode pembayaran n. Pada persamaan (1) terlihat bahwa semakin tingggi tingkat bunga i yang diberikan dengan periode pembayaran n yang tetap akan semakin memperkecil nilai PV. Dan apabila semakin rendah tingkat bunga i yang diberikan dengan periodc pembayaran n yang tetap akan memperbesar nilai PV. Namun para investor tidak hanya menitikberatkan pada kedua faktor itu saja, tetapi faktor inflasi juga sangat berperan dalam mempengaruhi investasi keuangan. AIiran dana (*cash flow*) dalam suatu negara tidak selalu dalam keadaan stabil. Oleh sebab itu pembayaran yang dilakukan investor juga dapat berubah, bisa terjadi pembayaran yang berubah menaik maupun pembayaran yang berubah menurun selama periode pembayaran n tahun.

Pada kertas kerja ini dibahas nilai tunai anuitas naik dan anuitas turun yang berubah secara geometri dan nilai tunai aliran dana riil yang mempertimbangkan terjadinya inflasi yang diasumsikan konstan untuk suatu periode waktu.

Nilai Anuitas Dengan Tingkat Inflasi Konstan

Dalam dunia keuangan selalu terjadi perubahan daya beli dari sejumlah mata uang. Semakin lama, perubahan ini cenderung menurun. *Penurunan daya beli ini disebut dengan inflasi.* Dalam finansial, tingkat inflasi j adalah tingkat kenaikan harga rata-rata secara umum.

Nilai indeks harga menyatakan harga rata-rata terbobot pada tahun tertentu yang dinyatakan dalam persentase terhadap harga rata-rata terbobot tahun awalnya. Jika P_1 merupakan nilai indeks harga pada periode pertama dan P_2 adalah nilai indeks harga pada periode kedua, maka tingkat inflasi per tahun dapat dinyatakann dengan (Fisher dan Rudiger, 1983)

$$j = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \qquad (2$$

Dari persamaan (2) dapat diperoleh bahwa

$$jP_1 = P_2 - P_1 \text{ atau } P_2 = P_1 + P_1\,j \text{ atau } P_2 = P_1(1+j)$$

Nilai P_1 ditentukan dengan

$$P_1 = \frac{\text{harga rata - rata terbobot pada tahun pertama}}{\text{harga rata - rata terbobot tahun awal}} \times 100\%$$

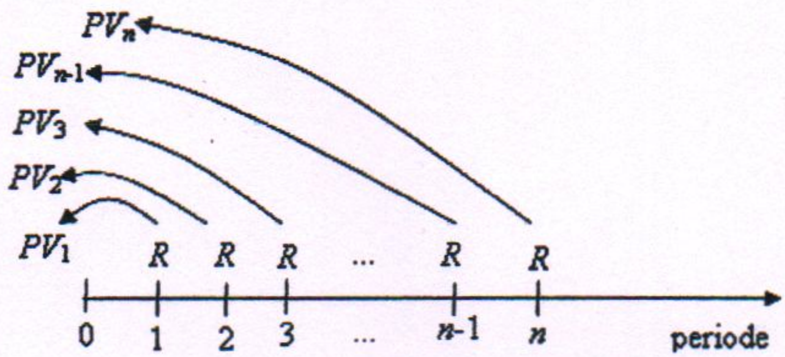
Karena harga rata-rata terbobot pada tahun pertama = harga rata-rata terbobot pada tahun awal, maka $P_1 = 100\%$ atau $P_1 = 1$.

Dengan mensubstitusikan $P_1 = 1$ ke persamaan $P_2 = P_1(1+j)$ maka diperoleh $P_2 = (1+j)$. Bila diasumsikan j konstan setiap periode (Lemuel, 2006), maka nilai tunai anuitas tiap periodenya adalah

$$\left.\begin{aligned}
PV_1 &= R(1+i)^{-1}P_1 = R(1+i)^{-1}(1) = R(1+i)^{-1}\\
PV_2 &= R(1+i)^{-2}P_2 = R(1+i)^{-2}(1+j)\\
PV_3 &= R(1+i)^{-3}P_3 = R(1+i)^{-3}P_2(1+j) = R(1+i)^{-3}(1+j)^2\\
&\vdots\\
PV_{n-1} &= R(1+i)^{-(n-1)}P_{n-1} = R(1+i)^{-(n-1)}(1+j)^{n-2}\\
PV_n &= R(1+i)^{-n}P_n = R(1+i)^{-n}(1+j)^{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

dengan PV_i adalah nilai tunai anuitas tiap periode i (i = 1, 2, 3,…, n), R besar pembayaran tiap periode, i tingkat bunga, j tingkat inflasi, dan P_i nilai indeks harga tiap periode i (i = 1, 2, 3,…, n).

Nilai Tunai Anuitas Berubah Secara Geometri
Persamaan (3) di atas dapat diilustrasikan oleh Gambar 1.



Gambar 1 : Ilustrasi dari persamaan (3)

Besar nilai tunai anuitas tiap periode dengan tingkat inflasi konstan adalah

$$
\begin{aligned}
PV_1 &= Rv \\
PV_2 &= Rv^2(1+j) \\
PV_3 &= Rv^3(1+j)^2 \\
&\vdots \\
PV^{n-1} &= Rv^{n-1}(1+j)^{n-2} \\
PV^{n} &= Rv^{n}(1+j)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Sehingga nilai tunai anuitas berubah secara geometri (*geometric varying annuity*) untuk kasus $i > j$ dan $i < j$ pada anuitas akhir (*immediate annuity*), masing-masing dinotasikan dengan $PV^*{}_{(GVA)}$ dan $\overline{PV^*}{}_{(GVA)}$ adalah

$$
\begin{aligned}
PV^*{}_{(GVA)} &= PV_1 + PV_2 + PV_3 + \dots + PV_{n-1} + PV_n \\
&= Rv + Rv^2(1+j) + Rv^3(1+j)^2 + \dots + Rv^{n-1}(1+j)^{n-2} + Rv^n(1+j)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Misalkan $u = (1+j)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
PV^*{}_{(GVA)} &= Rv + Rv^2u + Rv^3u^2 + \dots + Rv^{n-1}u^{n-2} + Rv^nu^{n-1} \\
&= R\left(v + v^2u + v^3u^2 + \dots + v^{n-1}u^{n-2} + v^nu^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan deret geometri diperoleh $U_1 = v$ dan $U_2 = vu^2$ dan

$r = \dfrac{U_2}{U_1} = vu = \dfrac{1+j}{1+i} < 1$ untuk kasus $i > j$. Sedangkan untuk kasus $i < j$ diperoleh

$r = \dfrac{U_2}{U_1} = vu = \dfrac{1+j}{1+i} > 1$, sehingga

$$a_{\overline{n}|GVA} = \frac{\left[1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}\right]}{i-j} \text{ untuk } i > j \text{ dan } \bar{a}_{\overline{n}|GVA} = \frac{\left[\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}-1\right]}{j-i} \text{ untuk } i < j.$$

Jadi, nilai tunai anuitas berubah secara geometri pada anuitas akhir adalah

$$PV^{*}_{(GVA)} = Ra_{\overline{n}|GVA} = R\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{i-j}\right], \text{ untuk kasus } i > j$$

dan

$$\overline{PV^{*}}_{(GVA)} = R\bar{a}_{\overline{n}|GVA} = R\left[\frac{\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}-1}{j-i}\right], \text{ untuk kasus } i < j.$$

Definisi 1 (Davis, 2006) Misalkan $PV^{*}_{(GVA)}$ adalah nilai tunai anuitas berubah secara geometri, $PV^{*}_{(RCF)}$ adalah nilai tunai aliran dana riil dan j adalah tingkat inflasi, maka nilai tunai anuitas berubah secara geometri dinyatakan dengan $PV^{*}_{(GVA)} = \frac{PV^{*}_{(RCF)}}{(1+j)}$.

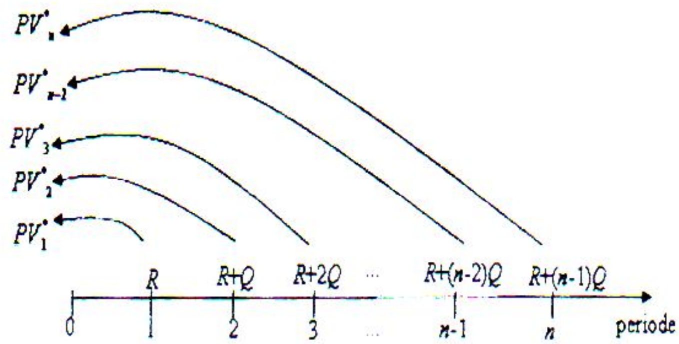
Dari Definisi 1 diperoleh nilai tunai aliran dana riil untuk kasus $i > j$ dan $i < j$ adalah

$$PV^{*}_{(RCF)} = Ra_{\overline{n}|GVA}(1+j) = R\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{\frac{i-j}{1+j}}\right]$$

$$\overline{PV^{*}}_{(RCF)} = R\,\bar{a}_{\overline{n}|GVA}(1+j) = R\left[\frac{\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}-1}{\frac{j-i}{1+j}}\right]$$

Anuitas Berubah Secara Geometri Untuk Kasus $i > j$ dan $i < j$

Nilai tunai anuitas naik dan turun berubah secara geometri dapat diilustrasikan dengan garis waktu seperti tampak pada Gambar 2.



Gambar 2 : Nilai tunai anuitas naik dan anuitas turun berubah secara geometri

dengan R adalah besar pembayaran tiap periode, Q besar pertambahan pembayaran tiap periode, n periode pembayaran, dan $PV^*_1, PV^*_2, PV^*_3, \ldots, PV^*_{n-1}, PV^*_n$ adalah nilai tunai anuitas tiap periode.

Besar anuitas tiap periode dengan tingkat inflasi konstan adalah

$$
\begin{aligned}
PV^*_1 &= Rv \\
PV^*_2 &= (R+Q)v^2(1+j) \\
PV^*_3 &= (R+2Q)v^3(1+j)^2 \\
&\vdots \\
PV^*_{n-1} &= (R+(n-2)Q)v^{n-1}(1+j)^{n-2} \\
PV^* &= (R+(n-1)Q)v^n(1+j)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Nilai tunai anuitas naik berubah secara geometri untuk kasus $i > j$ dan $i < j$ pada anuitas akhir masing-masing dinotasikan dengan $PV_I^*{}_{(GVA)}$ dan $\overline{PV}_I^*{}_{(GVA)}$. Sedangkan nilai tunai anuitas turun masing-masing dinotasikan dengan $PV_D^*{}_{(GVA)}$ dan $\overline{PV}_D^*{}_{(GVA)}$, yaitu

$$
\begin{aligned}
PV_I^*{}_{(GVA)} &= PV^*_1 + PV^*_2 + PV^*_3 + \ldots + PV^*_{n-1} + PV^*_n \\
&= Rv + (R+Q)v^2(1+j) + (R+2Q)v^3(1+j)^2 + \ldots + (R(n-2)Q)v^{n-1}(1+j)^{n-2} \\
&\quad + (R+(n-1)Q)v^n(1+j)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Dengan memisalkan $u = (1+j)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
PV_I^*{}_{(GVA)} &= R\left(v + v^2u + v^3u^2 + \ldots + v^{n-1}u^{n-2} + v^nu^{n-1}\right) + \\
&\quad Q\left(v^2u + 2v^3u^2 + \ldots + (n-2)v^{n-1}u^{n-2} + (n-1)v^nu^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Dari deret geometri $v + v^2u + v^3u^2 + \ldots + v^{n-1}u^{n-2} + v^nu^{n-1}$ diperoleh $U_1 = v$ dan $U_2 = v^2u$, maka $r = \dfrac{U_2}{U_1} = vu = \dfrac{1+j}{1+i} < 1$ untuk kasus $i > j$, dan $r = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1+j}{1+i} > 1$ untuk kasus $i < j$.

Sehingga

$$a_{\overline{n}|GVA} = \frac{\left[1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n\right]}{i-j} \text{ untuk kasus } i > j$$

dan

$$\bar{a}_{\overline{n}|GVA} = \frac{\left[\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n - 1\right]}{j-i} \text{ untuk kasus } i < j.$$

Kemudian misalkan

$$S'' = v^2u + 2v^3u^2 + \ldots + (n-2)v^{n-1}u^{n-2} + (n-1)v^n u^{n-1}.$$
$$S''vu = v^3u^2 + 2v^4u^3 + \ldots + (n-2)v^n u^{n-1} + (n-1)v^{n+1}u^n.$$
$$S'' - S''vu = v^2u + v^3u^2 + \ldots + v^n u^{n-1} - (n-1)v^{n+1}u^n.$$
$$(1-vu)S'' = vu\left(v + v^2u + \ldots + v^{n-1}u^{n-2} + v^n u^{n-1}\right) - nv^{n+1}u^n.$$

Untuk kasus $i > j$ diperoleh $S'' = \frac{1+j}{i-j}\left(a_{\overline{n}|GVA} - nv^n u^{n-1}\right)$ dan untuk $i < j$ diperoleh $S'' = \frac{1+j}{i-j}\left(\bar{a}_{\overline{n}|GVA} - nv^n u^{n-1}\right)$.

Untuk anuitas naik diambil $R = 1$ dan $Q = 1$ (Kellison, 1997), sehingga diperoleh

$$PV_I^*(GVA) = \left(\frac{1+i}{i-j}\right) a_{\overline{n}|GVA} - \left(\frac{1+j}{i-j}\right) nv^n (1+j)^{n-1}, \text{ untuk kasus } i > j$$

dan

$$\overline{PV}_I^*(GVA) = \left(\frac{1+i}{i-j}\right) \bar{a}_{\overline{n}|GVA} - \left(\frac{1+j}{i-j}\right) nv^n (1+j)^{n-1}, \text{ untuk kasus } i < j.$$

Sedangkan untuk anuitas turun, diambil $R = n$ dan $Q = -1$ (Kellison, 1997), lalu diperoleh

$$PV_D^*(GVA) = \frac{n - (1+j)a_{\overline{n}|GVA}}{i-j}, \text{ untuk } i > j$$

dan

$$\overline{PV}_D^*(GVA) = \frac{\left[n(i-j) - (1+j)\right] \bar{a}_{\overline{n}|GVA} + nv^n (1+j)^n}{i-j}, \text{ untuk kasus } i < j.$$

Nilai Tunai Aliran Dana Riil Pada Akhir Periode

Dari Definisi 1 yaitu $PV^*(GVA) = \frac{PV^*(RCF)}{(1+j)}$, ini dapat diubah untuk anuitas naik yaitu $PV_I^*(RCF) = PV_I^*(GVA)(1+j)$ untuk $i > j$ sehingga diperoleh

$$PV_I^{\bullet}{}_{(RCF)} = \frac{n(1+j)\left[1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n\right]-(1+j)^2 a_{\overline{n}|RCF} + nv^n(1+j)^{n+1}}{i-j}.$$

Karena $\overline{PV}_I^{\bullet}{}_{(RCF)} = \overline{PV}_I^{\bullet}{}_{(GVA)}(1+j)$ untuk $i < j$, sehingga diperoleh

$$\overline{PV}_I^{\bullet}{}_{(RCF)} = \left(\frac{1+i}{i-j}\right)\bar{a}_{\overline{n}|RCF}(1+j)-\left(\frac{1+j}{i-j}\right)nv^n(1+j)^n.$$

Dan untuk anuitas turun, $PV_D^{\bullet}{}_{(RCF)} = PV_D^{\bullet}{}_{(GVA)}(1+j)$ untuk $i > j$, sehingga diperoleh

$$PV_D^{\bullet}{}_{(RCF)} = \frac{n(1+j)\left[1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n\right]-(1+j)^2 a_{\overline{n}|RCF} + nv^n(1+j)^{n+1}}{i-j}.$$

Karena $\overline{PV}_D^{\bullet}{}_{(RCF)} = \overline{PV}_D^{\bullet}{}_{(GVA)}(1+j)$ untuk kasus $i < j$ sehingga diperoleh

$$\overline{PV}_D^{\bullet}{}_{(RCF)} = \frac{n(1+j)(i-j)\bar{a}_{\overline{n}|RCF} - (1+j)^2\bar{a}_{\overline{n}|RCF} + nv^n(1+j)^{n+1}}{i-j}.$$

Contoh Permasalahan

Pak Hadi ingin menginvestasikan uangnya di bank untuk biaya pendidikan anaknya, kelak bila di terima di perguruan tinggi. Anaknya diperkirakan akan kuliah selama 4 tahun, dengan biaya kuliah sebesar Rp12.000.000,00 per tahun. Jika Pak Hadi mendapat bunga dari bank sebesar 8% per tahun, akan ditentukan berapa rupiah seharusnya Pak Hadi menginvestasikan uangnya sekarang (nilai tunai) untuk biaya pendidikan anaknya hingga menjadi sarjana, bila :

a. diperkirakan terjadi inflasi sebesar 4% pertahun (kasus $i > j$). Dengan menggunakan nilai tunai anuitas naik dan anuitas turun secara geometri dan aliran dana riil, kalkulasinya dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Kasus untuk $i > j$

Solusi Nilai Tunai yang digunakan untuk kasus $i > j$	Jumlah Nominal yang Harus diinvestasikan (Rp)
$PV_I^{\bullet}{}_{(GVA)}$	103.107.026
$PV_I^{\bullet}{}_{(RCF)}$	107.231.306
$PV_D^{\bullet}{}_{(GVA)}$	107.071.527
$PV_D^{\bullet}{}_{(RCF)}$	111.354.388

b. diperkirakan terjadi inflasi sebesar 9% pertahun (kasus $i < j$). dengan menggunakan nilai tunai anuitas naik dan turun berubah secara geometri dan secara aliran dana riil, hasil kalkulasinya terlihat pada Tabel 2.

Tabel 2: Kasus untuk $i < j$

Solusi Nilai Tunai yang digunakan untuk kasus $i < j$	Jumlah Nominal yang Harus diinvestasikan (Rp)
$\overline{PV_{I\ (GVA)}^{*}}$	113.183.048
$\overline{PV_{I\ (RCF)}^{*}}$	123.369.516
$\overline{PV_{D\ (GVA)}^{*}}$	112.144.689
$\overline{PV_{D\ (RCF)}^{*}}$	122.237.718

Kesimpulan

Pada kertas kerja ini telah dipaparkan metode menghitung nilai tunai dari anuitas akhir dalam kegiatan investasi keuangan. Metode yang telah dibahas mempertimbangkan inflasi yang *diasumsikan konstan selama suatu periode dan* mulai diperhitungkan pada periode kedua. Metode ini meliputi perhitungan nilai tunai aliran dana riil dan nilai tunai anuitas beragam secara geometri.

Nilai tunai aliran dana real lebih besar daripada nilai tunai anuitas beragam secara geometri untuk kedua kasus; yaitu, untuk tingkat bunga lebih besar dari tingkat inflasi ($i > j$) dan tingkat bunga lebih kecil dari tingkat inflasi $i < j$. Secara ekonomi dengan adanya tingkat inflasi, maka dalam berinvestasi investor harus menyediakan dana yang lebih, *agar daya beli uang yang diinvestasikan tidak* turun.

Daftar Pustaka

Davis, Lemuel W.2006. Derived Correction to Calculator Solution for Certain Inflation Adjusted Annuity Problems, available at http://www.fpanet.org/journal/BetweenTheIssues/Contributions/061506.cfm

Eysell,Thomas H. 2006. Accounting for Inflation in Financial Planning: A Comparison of Two Solutions to Complex Planning Problems, available at http://www.fpanet.org/journal/BetweenTheIssues/Contribution/031506a.cfm-43k.

Farmer, Jim. 2000. Increasing and Decreasing Annuities and Time Reversal. Division of Economic and Financial Studies. *Macquarie University Research Paper*, No.2000/02.

Fisher, Stanley and Dornbusch, Rudiger. 1983. *Economics*. McGraw-Hill Inc. United State of America.

Joyce, William B. 2000. Consistent treatment of Inflation for Retirement. *Association for Financial Counseling and Planning Education*.Vol.11: 69-76

Kellison, Stephen G. 1997. *The Theory of Interest*. Richard D. Irwin Inc. Illinois, United State of America